高等代数

高等代数

- 第 1 章 多项式
  - 1.1 数域
  - 1.2 一元多项式
  - 1.3 多项式整除
  - 1.4 最大公因式
  - 1.5 因式分解定理
  - 1.6 重因式
  - 1.7 多项式函数
  - 1.8 因式分解
  - 1.9 有理系数多项式
  - 1.10 多元多项式
  - 1.11 对称多项式
  - 方法
  - 习题与定理
- 第 2 章 行列式
  - 2.1 引言
  - 2.2 排列
  - 2.3 n 阶行列式
  - 2.4 行列式的性质
  - 2.5 行列式的计算
  - 2.6 按行展开
  - 2.7 克拉默法则
  - 2.8 拉普拉斯定理
  - 习题与定理
- 第 3 章 线性方程组
  - 3.1 消元法
  - 3.2 n 维向量空间
  - 3.3 线性相关性
  - 3.4 矩阵的秩
  - 3.5 有解判别定理
  - 3.6 解的结构
  - 3.7 二元高次方程组
  - 习题与定理
- 第 4 章 矩阵
  - 4.1 矩阵的背景
  - 4.2 矩阵的运算
  - 4.3 矩阵乘积的行列式与秩
  - 4.4 矩阵的逆
  - 4.5 分块矩阵
  - 4.6 初等矩阵
  - 4.7 分块乘法的初等变换
  - 习题与定理
- 第 5 章 二次型
  - 5.1 二次型及其矩阵表示
  - 5.2 标准形
  - 5.3 唯一性

5.4 正定二次型
习题与定理
第 6 章 线性空间
6.1 集合与映射
6.2 线性空间
6.3 维数、基与坐标
6.4 基变换与坐标变换
6.5 线性子空间
6.6 子空间的交与和
6.7 子空间的直和
6.8 线性空间的同构
习题与定理
第 7 章 线性变换
7.1 线性变换的定义
7.2 线性变换的运算
7.3 线性变换的矩阵
7.4 特征值与特征向量
7.5 对角矩阵
7.6 线性变换的值域与核
7.7 不变子空间
7.8 若尔当标准形
7.9 最小多项式
习题与定理
第 8 章
8.1 λ—矩阵
8.2 λ—矩阵在初等变换下的标准形
8.3 不变因子
8.4 矩阵相似的条件
8.5 初等因子
8.6 若尔当标准形的理论推导
8.7 矩阵的有理标准形
习题与定理
第 9 章 欧几里得空间
9.1 定义与基本性质
9.2 标准正交基
9.3 同构
9.4 正交变换
9.5 子空间
9.6 实对称矩阵的标准形
9.7 向量到子空间的距离
9.8 酉空间介绍
习题与定理
第 10 章 双线性函数与辛空间
10.1 线性函数
10.2 对偶空间
10.3 双线性函数
10.4 辛空间

第 1 章 多项式

1.1 数域

定义 1

> 设 $\mathbb{P}$ 是由一些复数组成的集合, 其中包括 0 与 1. 如果 $\mathbb{P}$ 对和, 差, 积, 商具有 **封闭性**, 那么就称 $\mathbb{P}$ 为一个 **数域**.

- 所有的数域都包含有理数域作为它的一部分.

1.2 一元多项式

定义 2: **一元多项式**, k 次项系数

定义 3: **零多项式**, **首项**, **次数**: $\partial(f(x))$.

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s$$

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$$

- 加法交换律
- 加法结合律
- 乘法交换律
- 乘法结合律
- 乘法对加法的分配律
- 乘法消去律

定义 4

> 所有系数在数域 $\mathbb{P}$ 中的一元多项式的全体, 称为数域 $\mathbb{P}$ 上的 **一元多项式环**, 记为 $\mathbb{P}[x]$, $\mathbb{P}$ 称为 $\mathbb{P}[x]$ 的 **系数域**.

1.3 多项式整除

带余除法

> 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $g(x)\neq 0$, 一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x),r(x)$, 使得
>
> $$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$
>
> 成立, 其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或 $r(x)=0$, 并且这样的 $q(x),r(x)$ 是唯一决定的. 其中 $q(x)$ 称为 **商式**, $r(x)$ 称为 **余式**.

定义 5: **整除**, **因式**, **倍式**

定理 1

> 对于数域 P 上的任意两个多项式 $f(x), g(x)$, 其中 $g(x) \neq 0, g(x) \mid f(x)$ 的充要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

- 带余除法中 $g(x)$ 必须非零, 但 $g(x)|f(x)$ 中 $g(x)$ 可以为零;
- 任意一个多项式都整除零多项式.

性质

1. 如果 $f(x)|g(x), g(x)|f(x)$, 那么 $f(x)=cg(x)$, 其中 c 为非零常数;
2. **传递性**: 如果 $f(x)|g(x), g(x)|h(x)$, 那么 $f(x)|g(x)$;
3. 如果 $f(x)|g_i(x), i=1,2,\cdots,r$, 那么

$$f(x)|h(x),\ h(x)=(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x))$$

   其中 $h(x)$ 称为 $g_i(x), i=1,2,\cdots,r$ 的一个 **组合**;

1.4 最大公因式

定义 6: **最大公因式**

引理

> 如果 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立, 那么 $f(x), g(x)$ 和 $g(x), r(x)$ 有相同的公因式.

定理 2

> 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x), g(x)$, 在 $P[x]$ 中存在一个最大公因式 $d(x)$, 且 $d(x)$ 可以表成 $f(x), g(x)$ 的一个组合, 即 $P[x]$ 中存在多项式 $u(x), v(x)$ 使
>
> $$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

辗转相除法

	$g(x)$	$f(x)$	
$q_2(x)=$ $-\frac{27}{5}x+9$	$3x^3+10x^2+2x-3$	$x^4+3x^3-x^2-4x-3$	$\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$ $=q_1(x)$
	$3x^3+15x^2+18x$	$x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$	
	$-5x^2-16x-3$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$	
	$-5x^2-25x-30$	$-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$	
	$r_2(x)=9x+27$	$r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81}$ $=q_3(x)$
		$-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x$	
		$-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$	
		$-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$	
		0	

定义 7: **互素**

定理 3

> $P[x]$ 中两个多项式 $f(x), g(x)$ 互素的充要条件是, $P[x]$ 中存在多项式 $u(x), v(x)$ 使
>
> $$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

定理 4

> 如果 $(f(x), g(x))=1$, 且 $f(x) \mid g(x)h(x)$, 那么 $f(x) \mid h(x)$.

推论

> 如果 $f_1(x) \mid g(x), f_2(x) \mid g(x)$, 且 $(f_1(x), f_2(x))=1$, 那么 $f_1(x)f_2(x) \mid g(x)$.

多个多项式有类似的以上性质.

1.5 因式分解定理

定义 8: 数域 P 上的 **不可约多项式**.

定理 5

> 如果 $p(x)$ 是一个不可约多项式, 那么对于任意的两个多项式 $f(x), g(x)$, 由 $p(x) \mid f(x)g(x)$ 一定能退出 $p(x) \mid f(x)$ 或 $p(x) \mid g(x)$.

因式分解及唯一性定理

定义: **标准分解式** (首项系数为 1)

1.6 重因式

定义: k **重因式**, **单因式**

定理 6

> 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$), 那么它是微商 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

推论 1

> 如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 ($k \geq 1$), 那么 $p(x)$ 是 $f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(n)}(x)$ 的因式.

推论 2

> 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充要条件为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

推论 3

> 多项式 $f(x)$ 没有重因式的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素.

- 去掉重因式:

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

1.7 多项式函数

定理 7 (**余数定理**)

> 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$, 所得的余式是一个常数, 这个常数等于函数值 $f(\alpha)$.

推论

> α 是 $f(x)$ 的根的充要条件是 $(x-a) \mid f(x)$.

定理 8

> $P[x]$ 中 n 次多项式在数域 P 中的根不可能多于 n 个, 重根按重数计算.

定理 9

> 如果 $f(x), g(x)$ 的次数都不超过 n, 而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ 有相同的值, 即
>
> $$f(\alpha_i) = g(\alpha_i), i = 1, 2, \cdots, n+1$$
>
> 那么 $f(x) = g(x)$.

1.8 因式分解

代数基本定理

> 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域中有一根.

复系数多项式因式分解定理

> 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在复数域中都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

实系数多项式因式分解定理

> 每个次数 ≥ 1 的复系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

1.9 有理系数多项式

定义

> 如果一个非零的整系数多项式 $g(x)=b_nx^m+b_{n-1}^{n-1}+\cdots+b_0$ 的系数 $b_n,n_{n-1},\cdots,b_0$ 没有异于 ±1 的公因子 (互素), 那么它就称为一个 **本原多项式**.

定理 10（高斯引理）

> 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

定理 11

> 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

推论

> 设 $f(x),g(x)$ 是整系数多项式, 且 $g(x)$ 是本原的. 如果 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中 $h(x)$ 是有理系数多项式, 那么 $h(x)$ 一定是整系数的.

定理 12

> 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式, 而 $\dfrac{r}{s}$ 是它的一个有理根, 其中 r,s 互素, 那么必有 $s\mid a_n,r\mid a_0$.特别地, 如果 $f(x)$ 的首项系数为 1, 那么 $f(x)$ 的有理根都是整根, 而且是 a_0 的因子.

定理 13 (艾森斯坦判别法)

> 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是一个整系数多项式. 如果有一个素数 p 使得
>
> 1. $p\nmid a_n$;
> 2. $p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$;
> 3. $p^2\nmid a_0$,
>
> 那么 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

- 有理数域上存在任意次数的不可约多项式, 如 x^n+2

1.10 多元多项式

定义: 单项式, 同类项, n 元多项式

定义 10: n 元多项式环, 多项式的次数

字典排列法

定理 14

> 当 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$ 时, 乘积 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项等于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项的乘积.

推论 1

> 如果 $f_i\neq 0(i=1,2,\cdots,m)$, 那么 $f_1f_2\cdots f_m$ 的首项等于每个 f_i 的首项的乘积.

推论 2

> 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0, g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, 那么
>
> $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$$

i 次齐次多项式 f_i 称为 f 的 i **次齐次成分**.

1.11 对称多项式

定义 11

> n 元多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 如果对于任意的 $i,j,1\leq i<j\leq n$, 都有
>
> $$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$
>
> 那么这个多项式称为 **对称多项式**.

初等对称多项式

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots x_{n-1}x_n,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$$

- 对称多项式的和与积, 以及对称多项式的多项式还是对称多项式.

定理 15 (对称多项式基本定理)

> 对于任意一个 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都有一个 n 元多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 使得
>
> $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n),$$
>
> 并且 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 被唯一确定.

表示思路

1. 首项 (按字典排列法) $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$, $a\neq 0$ 满足 $l_1\geq l_2\geq\cdots\geq l_n\geq 0$;

2. 作对称多项式 $\varphi_1 = a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}$, 由定理 14 推论 1 知其首项为 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$. 令 $f_1 = f - \varphi_1$;
3. 重复操作, 得到一系列对称多项式 $f,\ f_1 = f - \varphi_1,\ f_2 = f_1 - \varphi_2, \cdots$.

方程在复数域有重根的充要条件

差积的平方 $D = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2$ 可以表示成

$$a_1 = -\sigma_1, a_2 = \sigma_2, \cdots, a_n = (-1)^n\sigma_n$$

的多项式 $D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 由根与系数的关系知 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

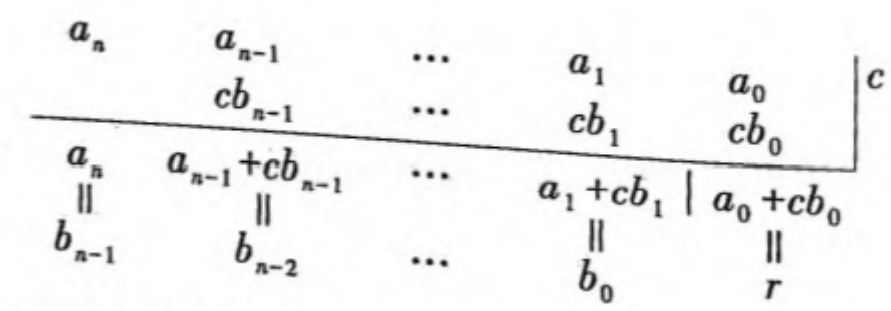
的根, 故 $D(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $f(x)$ 在复数域中有重根的充要条件.

- $D(a_1, a_2) = a_1^2 - 4a_2$.
- $D(a_1, a_2, a_3) = a_1^2a_2^2 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_3^2 + 18a_1a_2a_3$.

方法

综合除法

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\\
g(x) &= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0\\
f(x) &= g(x)(x - c)
\end{aligned}$$



例 表成幂和

image-20220701090925261

故 $x^5 = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$.

综合除法适合将多项式表成幂和, 对于单项式, 更好的做法是用二项式定理.

用 **初等对称多项式** 表出对称多项式

- 逐步消去首项法
- 待定系数法

习题与定理

1. 证明: $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的是哪个根成等差数列的充要条件是 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

提示: 充要条件即 $(2x_1-x_2-x_3)(x_1-2x_2+x_3)(x_1+x_2-2x_3)=0$, 表为初等多项式, 并注意到 $\sigma_1=-a_1,\sigma_2=a_2,\sigma_3=-a_3$.

2. 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 那么 $f(h(x))$ 与 $g(h(x))$ 也互素.

3. 对于整系数多项式 $f(x)$, 如果 $f(0)$ 和 $f(1)$ 都是奇数, 那么 $f(x)$ 没有整数根.

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根, 证明: $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 的多项式.

牛顿公式

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x-x1)(x-x2)\cdots(x-x_n)\\
&=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n\\
s_k&=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k
\end{aligned}
$$

$$
\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{x-x_i}=\sum_{i=1}^n\left[\sum_{r=0}^k\frac{1}{x}\left(\frac{x_i}{x}\right)^r+\frac{\left(\frac{x_i}{x}\right)^{k+1}}{x-x_i}\right],
$$

$$
\begin{aligned}
x^{k+1}f'(x)&=\left[\sum_{i=1}^n\left(\sum_{r=0}^kx_i^rx^{k-r}+\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}\right)\right]f(x)\\
&=(s_0x^k+s_1x^{k+1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)\\
&=(s_0x^k+s_1x^{k+1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x).
\end{aligned}
$$

由 $\partial(g(x))<n$, 比较 x^n 系数知

$$
s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=(-1)^k(n-k)\sigma_k,\quad k\le n,
$$

$$
\begin{cases}
s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0, & k\le n,\\
s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0, & k>n.
\end{cases}
$$

注:

$$
s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}\quad\Leftrightarrow\quad\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_{n-1}=0
$$

第 2 章 行列式

2.1 引言

2.2 排列

2.3 n 阶行列式

2.4 行列式的性质

2.5 行列式的计算

范德蒙德行列式

2.6 按行展开

2.7 克拉默法则

2.8 拉普拉斯定理

习题与定理

1. 由此可证明奇偶排列各半

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. 提示：按第一行展开

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)$$

3. 友阵

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

4. 正余弦

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = e^{in\alpha}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \sin n\alpha$$

5. 求导法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

6. 代数余子式之和（按列拆开）

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

7. 例题（提示：第一列减去第二列后，按第一列展开）

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}=\begin{cases} \dfrac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}, & y\neq z \\ [x+(n-1)y](x-y)^{n-1}, & y=z \end{cases}$$

第 3 章 线性方程组

3.1 消元法

3.2 n 维向量空间

3.3 线性相关性

3.4 矩阵的秩

3.5 有解判别定理

3.6 解的结构

3.7 二元高次方程组

引理 1

设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

施数域 $\mathbb{P}$ 上的两个非零多项式，系数 a_0，b_0 不全为零，则二者在 $P[x]$ 中有 **非常数公因式** 的充要条件是

$$\exists\, u(x),v(x)\in\mathbb{P}[x],\partial(u(x))<m,\partial(v(x))<n$$
$$\text{s.t. } u(x)f(x)=v(x)g(x)$$

定义 1 结式 $\mathrm{R}(f,g)$

定理 1

$\mathrm{R}(f,g)=0$ 的充要条件是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有非常数的公因式，或者 a_0，b_0 全为零.

定理 2

$$\begin{cases}f(x,y)=0,\\ g(x,y)=0.\end{cases}$$

如果 (x_0,y_0) 是上述二元高次方程组的一个复数解，那么 y_0 就是 $\mathrm{R}_x(f,y)$ 的一个根，反之亦然。

习题与定理

1. 与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系。
2. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n & = 0. \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

设 M_i 是矩阵 A 中划去第 i 列剩下的矩阵的行列式，则 $M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n$ 是方程组的一个解。

3. 设实数域上的矩阵 A 为：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1) 如果 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$，那么 $|A| \neq 0$.

2) 如果 $a_{ii} > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n$，那么 $|A| > 0$.

提示：只要证明以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解，也就是对于任一组不全为零的实数组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，必有某 i 使 $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n \neq 0$.

4. 求直角坐标方程

1) $x = t^2 - t + 1, y = 2t^2 + t - 3$;

2) $x = \dfrac{2t+1}{t^2+1}, y = \dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$;

5. 求结式

1) $\dfrac{x^5-1}{x-1}$ 与 $\dfrac{x^7-1}{x-1}$;

2) $x^n + x + 1$ 与 $x^2 - 3x + 2$;

3) $x^n + 1$ 与 $(x-1)^n$.

第 4 章 矩阵

4.1 矩阵的背景

4.2 矩阵的运算

4.3 矩阵乘积的行列式与秩

4.4 矩阵的逆

4.5 分块矩阵

4.6 初等矩阵

4.7 分块乘法的初等变换

习题与定理

1. 与如下这个矩阵*可交换* 的矩阵只能是*准对角矩阵*.

$$A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & & \\ & a_2E_2 & \\ & & \ddots, a_rE_r \end{pmatrix}$$

2. 如果 A 与所有的 n 阶矩阵可交换，那么 $A=aE$ 是数量阵.

3. 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k, k=0,1,2\cdots$，$a_{ij}=s_{i+j-2}, i,j=1,2,\cdots,n$，证明：行列式 $|a_{ij}|=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$.

提示：右端是范德蒙德行列式的平方，左边是两个矩阵的乘积.

4. 若 A^{-1}, C^{-1} 存在，则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

5. 可逆对称矩阵的逆矩阵对称，且不存在奇数阶可逆反称矩阵.

思路：若 $A=-A^{\mathrm{T}}$，则 $|A|=\left|-A^{\mathrm{T}}\right|=(-1)^n|A|$.

6. 上三角矩阵的**乘积**仍是上三角矩阵，可逆上三角矩阵的**逆**仍然是上三角矩阵.

7. 若 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n\geq 2$），那么

$$\mathrm{R}(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n,\\ 1, & R(A)=n-1,\\ 0, & R(A)<n-1.\end{cases}$$

8. 若 $A\in\mathbb{R}_{n\times m}$，$B\in\mathbb{R}_{m\times n}$，$\lambda\neq 0$，则：

$$\begin{vmatrix}E_m & B\\ A & E_n\end{vmatrix}=|E_n-AB|=|E_m-BA|$$

$$|\lambda E_n-AB|=\lambda^{n-m}\,|\lambda E_m-BA|$$

提示：利用 $\left|E_n-A\left(\dfrac{B}{\lambda}\right)\right|=\left|E_m-\left(\dfrac{B}{\lambda}\right)A\right|$.

9. 若 A 是 $n\times n$ 矩阵，$\mathrm{r}(A)=1$，则

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$A^2=kA$$

若 $n=2$ 且 $A^l=O,l\geq 2$，则 $A^2=O$.

10. 若 A 是 $n\times n$ 矩阵，$A^2=A$，则 $\mathrm{r}A+\mathrm{r}A-E=n$

11. 若 A 是 $n\times n$ 矩阵，$n>2$，则 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

12. 若 A,B,C,D 都是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{C=A^{-1}CA}$，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD-CB}|$$

13. 若 $A\in\mathbb{R}_{m\times n}$ 秩为 r，则有 $m\times r$ 列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 行满秩矩阵，使得 $A=PQ$.

$$\begin{aligned}A&=P_1\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}_{m\times n}Q_1\\ &=P_1\begin{pmatrix}E_r\\ O\end{pmatrix}_{m\times r}(E_r\quad O)_{r\times n}Q_1\\ &=PQ\end{aligned}$$

14. A 与 B 可交换 $\Leftrightarrow$ $A+aE$ 与 $B+bE$ 可交换

第 5 章 二次型

5.1 二次型及其矩阵表示

数域 P 上的 n 元 **二次型**.

由 $x_1, \cdots, x_n$ 到 $y_1, \cdots, y_n$ 的一个 **线性替换**.

若系数行列式不等于零，则称该线性替换为 **非退化** 的.

合同变换 具有自反性、对称性、传递性.

5.2 标准形

定理 1

> 数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成平方和的形式.

定理 2

> 数域 P 上任意一个对称矩阵合同于一对角矩阵.

5.3 唯一性

定理 3

> 任意一个复二次型，可以经过非退化线性替换变成 **规范形** 且唯一.

定理 4 惯性定理

> 任意一个实二次型，可以经过非退化线性替换变成 **规范形** 且唯一.

定义 符号差 $\equiv$ 正惯性指数 $-$ 负惯性指数

定理 5 （对称矩阵的秩 与 合同的对角矩阵的元素个数 的关系）

5.4 正定二次型

定理 6

> n 元实二次型正定 $\Leftrightarrow$ 正惯性指数等于 n.

推论：正定矩阵的行列式大于零.

赫尔维茨定理

定理 7

- 实二次型正定 ⇔ 顺序主子式全大于零 ⇔ 所有主子式均大于零；
- 实二次型负定的充要条件是计数阶顺序主子式小于零，偶数阶大于零。

定理 8 ⭐

对于实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 以下条件等价：

- $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的；
- 它的正惯性指数与秩相等；
- 存在实可逆矩阵 C，使得 $A=C^{\mathrm{T}}C$；
- A 的所有主子式皆大于等于零。

正交变换矩阵

- 正交相似对角化
- 配方法
  - 若有平方项，$(x_1+a_{12}x_2+\cdots)^2$
  - 若无平方项，可同时使用，$(x_1+x_2)(x_1-x_2)$
  - 若无平方项，且项数较多，$(x_1+x_3+x_4)(x_2+x_3+x_4)$
- 行列初等变换
  - $E(i+j(k))$ 即可

习题与定理

1. 设 A 是一个 n 阶矩阵，则

1）A 是反称矩阵 ⇔ $\forall X\in\mathbb{R}^n, X^{\mathrm{T}}AX=0$；

2）若 A 是对称矩阵，则 $\forall X\in\mathbb{R}^n, X^{\mathrm{T}}AX=0 \Leftrightarrow A=O.$

2. 将 n 阶矩阵按合同分类，则总共有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 种。

3. 一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充要条件是：秩等于 2 且符号差等于 0，或者秩等于 1。

4. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，则：

- 则当 t 充分大时，$tE+A$ 是正定矩阵。

- 如果 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定。
- 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 正定，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也正定
- $n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2$ 是半正定的

5. ☆ $\mathrm{r}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{r}(A)$ 恒成立，且若 A 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}A$ 是正定矩阵.

6. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并用矩阵验算所得结果：

$$
\begin{aligned}
&1)\ x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}\\
&2)\ x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\
&3)\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\\
&4)\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\ \bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}
\end{aligned}
$$

7. 设 $f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2, n=p+q$，其中 y_i 是 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的一次齐次式，$y=Cx$，则 f 的正惯性指数 $\ll p$，负惯性指数 $\ll q$，且 f 的秩等于 C 的秩.

8. 反称矩阵合同于

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & \\
-1 & 0 & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & -1 & 0 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & & -1 & 0 & & \\
 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

9. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，则存在正实数 c，使得对任一 n 维实向量 X，都有 $\left|X^{\mathrm{T}}AX\right|\le cX^{\mathrm{T}}X$.

10. 主对角线上全是 1 的上三角形矩阵称为特殊上三角形矩阵. 设 A 是对称矩阵，T 是特殊上三角形矩阵，则

- $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 对应的顺序主子式有相同的值；

$$B=\begin{pmatrix} T_{11}^{\mathrm{T}}A_{11}T_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

- 若 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式不全为 0，那么一定存在 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形；

11. 证明：

1）如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型；

2）如果 A 是正定矩阵，那么 $|A|\leq a_{nn}H_{n-1}$，其中 H_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式；

3）如果 A 是正定矩阵，那么 $|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

4）如果 $T=(t_{ij})_{n\times n}$ 是实可逆矩阵，那么 $|T|^2\leq\prod\limits_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$.

第 6 章 线性空间

6.1 集合与映射

$a \in M, a' \in M', \sigma(a) = a'$

- **映射**：σ，**原像**：a，**像**：a'.
- 若 $M = M'$，则称 σ 为 M 到自身的 **变换**.
- 若 $a = a'$，则称 σ 为 **恒等映射** 或 **单位映射**，记为 1_M 或 1.
- 映射的乘法适合结合律，即 $(\psi\tau)\sigma = \psi(\tau\sigma)$.
- 若 $\sigma(M) = M'$，则称 σ 为 **满射**；
- 若 $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2), a_1 \neq a_2$，则称 σ 为 **单射**；
- 若 σ 既是满射也是单射，则称其为 $1-1$ **对应** 或 **双射**；
- 对于双射 σ，定义其逆映射 σ^{-1}, $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_M$.
- 若 σ, τ 分别是 M 到 M' 和 M' 到 M'' 的双射，则 $\sigma\tau$ 是 M 到 M'' 的双射.

6.2 线性空间

定义

- 加法
  - 交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
  - 结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
  - 存在零元素：$0 + \alpha = \alpha$;
  - 存在负元素：$\alpha + \beta = 0$;
- 数量乘法
  - 单位 1：$1\alpha = \alpha$;
  - 结合律：$k(l\alpha) = (kl)\alpha$;
- 分配律
  - $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;
  - $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

  注意这里的 $+$ 也未必是一般意义下的加号

判断点

- $1\alpha = \alpha$;
- $0\alpha = 0$;

性质

1. 零元素唯一;

2. 负元素唯一；

3. $0\alpha = 0,\ k0 = 0,\ (-1)\alpha = -\alpha$；

4. 如果 $k\alpha = 0$，那么 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$.

例子

- $$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2)$$
  $$k \circ (a_1, b_1) = \left(ka_1, kb_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2\right)$$

- 一维线性空间：

$$a \oplus b = ab$$
$$k \circ a = a^k$$

- 三维线性空间：由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}, \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

6.3 维数、基与坐标

线性组合、线性表出

定理 1

> 如果线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，且 V 中任一向量都可以经它们线性表出，则 V 是 n 维的，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的一组基。

6.4 基变换与坐标变换

过渡矩阵：$\alpha = \beta C.$

$\beta y = \alpha x = \beta C x \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$

6.5 线性子空间

定理 2

> 如果线性空间 V 的非空子集 W 对于 V 的两种运算封闭，则 W 是 V 的一个子空间。

- 零子空间
- 平凡子空间
- 解空间

- V 中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 生成的子空间：$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

定理 3

> 1. 两个向量组生成相同子空间的充要条件是这两个向量组等价；
> 2. $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ 的维数等于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 的秩。

定理 4

> 设 W 是数域 P 上 n 维 线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 W 的一组基，则这组向量必定可扩充为整个空间的基。

6.6 子空间的交与和

定理 5

> 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的连个子空间，那么它们的交 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 是子空间。

- 交换律：$V_1 \cap V_2 = V_2 \cap V_1$;
- 结合律：$(V_1 \cap V_2) \cap_3 = V_1 \cap (V_2 \cap V_3)$;
- 多个子空间的交：$\bigcap\limits_{i=1}^{s} V_i \equiv V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s$.

定理 6

> 如果 V_1, V_2 是 V 的子空间，那么它们的和 $V_1 + V_2$ 也是 V 的子空间

注意子空间的和不一定等于二者并集

- 交换律：$V_1 + V_2 = V_2 + V_1$;
- 结合律：$(V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$;
- 设 V_1, V_2, W 都是子空间，那么

$$\begin{aligned} W \subset V_1, W \subset V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad W \subset V_1 + V_2 \\ W \supset V_1, W \supset V_2 \quad &\Leftrightarrow \quad W \supset V_1 + V_2 \end{aligned}$$

- $V_1 \subset V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V_1 \cap V_2 = V_1 \quad \Leftrightarrow \quad V_1 + V_2 = V_2$.

定理 7（维数公式）

> 如果 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，那么
>
> $$\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

推论

> 如果 n 维线性空间 V 中两个子空间 V_1, V_2 的维数之和大于 n，那么 V_1, V_2 必含有非零的公共向量。

6.7 子空间的直和

定义 9

> 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间，如果和 $V_1 + V_2$ 中每个向量 α 的分解式
>
> $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_i \in V_i,\ i = 1, 2$$
>
> 是唯一的，这个和就称为 **直和**，记为 $V_1 \oplus V_2$.

定理 8

> 和 $V_1 + V_2$ 是直和的充要条件是等式
>
> $$\alpha_1 + \alpha_2 = 0,\ \alpha_i \in V_i,\ i = 1, 2$$
>
> 只在 α_i 全为零向量时才成立。

推论

> 和 $V_1 + V_2$ 是直和 $\quad\Leftrightarrow\quad V_1 \cap V_2 = \{0\} \quad\Leftrightarrow\quad \dim(V_1 \cap V_2) = 0.$

定理 9

> 设 V_1, V_2 是 V 的子空间，令 $W = V_1 + V_2$，则 $W = V_1 \oplus V_2$ 的充要条件是
>
> $$\dim(W) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

定理 10

> 设 U 是线性空间 V 的一个子空间，那么一定存在一个子空间 W，使得 $V = U \oplus W$.

定义 10

> 设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的子空间，如果和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 中每个向量 α 的分解式
>
> $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s,\ \alpha_i \in V_i,\ i = 1, 2, \cdots, s$$
>
> 是唯一的，这个和就称为 **直和**，记为 $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$.

定理 11

> 设 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是线性空间 V 的子空间，则一下条件等价：
>
> 1. $W = \sum_{i=1}^{s} V_i$ 是直和；
> 2. 零向量的表法唯一；
> 3. $V_i \cap \sum\limits_{i=1} V_j = \{0\}, i = 1, 2, \cdots, s$
> 4. $\dim(W) = \sum_{i=1}^{s} \dim(V_i)$.

6.8 线性空间的同构

定义 11

> 数域 P 上两个线性空间 V 与 V' 称为 **同构** 的，如果由 V 与 V' 由一个双射 σ，且
>
> 1. $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha+\beta)$;
> 2. $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$.
>
> 映射 σ 称为 **同构映射**.

同构映射的性质

- $\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$.
- $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)$.
- 向量组线性相关的充要条件是，它们的像线性相关.
- 如果 V_1 是 V 的衣蛾线性子空间，那么 V_1 在 σ 下的像集合是 $\sigma(V)$ 的子空间，且 V_1 与 $\sigma(V_1)$ 的维数相同.
- 同构映射的逆映射、乘积还是同构映射.

定理 12

> 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充要条件是它们有相同的维数.

习题与定理

1. 证明：

$$
\begin{gathered}
M\subset N\quad\Rightarrow\quad M\cap N=M,\ M\cup N=N\\
M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L)\\
M\cup(N\cup L)=(M\cup N)\cup(M\cup L)
\end{gathered}
$$

2. 如果 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式，但其中任意两个都不互素，那么它们线性无关.

3. 若 $V=V_1\oplus V_2$，$V_1=V_{11}\oplus V_{12}$，那么 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

4. 和 $\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 是直和 $\Leftrightarrow V_i\cap\sum\limits_{j=1}^{i-1}V_j=\{0\},i=2,3,\cdots,s$.

5. 每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

6. 巧用单位根.

1. 1) 证明：在 $P[x]_n$ 中，多项式

$$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

是一组基，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数；

2) 在 1) 中，取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

证明 1) $f_i(x)$ 的特性是 $f_i(a_j)=0$，$j\neq i$，$f_i(a_i)\neq 0$. 设

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_{i-1}f_{i-1}(x)+k_if_i(x)+k_{i+1}f_{i+1}(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0.$$

用上述特性，将 $x=a_i$ 代入，得到

$$k_1f_1(a_i)+\cdots+k_{i-1}f_{i-1}(a_i)+k_if_i(a_i)+k_{i+1}f_{i+1}(a_i)+\cdots+k_nf_n(a_i)=0.$$

由 $j\neq i$ 时 $k_jf_j(a_i)=0$，即有 $k_if_i(a_i)=0$. 但 $f_i(a_i)\neq 0$. 故 $k_i=0$. 当 i 从 1 到 n 取值后就有

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=0.$$

这就证明了 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是线性无关的. 又 $P[x]_n$ 是 n 维的，故 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 是它的基.

2) **提示** 全体 n 次单位根是 $a_1=1$，$a_2=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}\xlongequal{\text{记成}}\varepsilon$，$a_3=\varepsilon^2,\cdots,a_n=\varepsilon^{n-1}$. 于是 $x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$ 及 $f_i(x)=\dfrac{x^n-1}{x-\varepsilon^{i-1}}=\dfrac{x^n-(\varepsilon^{i-1})^n}{x-\varepsilon^{i-1}}$，将它展开成 x 的多项式，它的各系数可以简单地用单位根表示出来.

解 由提示内容，$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$，

$$f_1(x)=(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})=\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{n-1},$$

$$f_2(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon}=\frac{x^n-\varepsilon^n}{x-\varepsilon}=\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^{n-2}x+\cdots+x^{n-1},$$

$$f_3(x)=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon^2}=\frac{x^n-(\varepsilon^2)^n}{x-\varepsilon^2}=\varepsilon^{2(n-1)}+\varepsilon^{2(n-2)}x+\cdots+x^{n-1},$$

7. 任意一个线性空间 V，至少有一个向量不属于 V 所有的非平凡子空间.

1. 1) 证明：在 $P[x]_n$ 中，多项式

$$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\quad i=1,2,\cdots,n$$

是一组基，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数；

2) 在 1)中，取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}.$$

证明：$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

3. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一秩为 n 的二次型，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个

$$\frac{1}{2}(n-|s|)$$

维子空间 V_1（其中 s 为符号差），使对任一 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1$ 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

4. 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个非平凡的子空间，证明：在 V 中存在 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\boldsymbol{\alpha}\in V_2$ 同时成立.

5. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明：V 中至少有一向量不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中任何一个.

第 7 章 线性变换

7.1 线性变换的定义

定义 1

定义 1 线性空间 V 的一个变换 $\mathscr{A}$ 称为**线性变换**，如果对于 V 中任意的元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 和数域 P 中任意数 k，都有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\quad \mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{1}$$

例子:

- 把每个向量 ξ 变到它在 α 上的内设影的变换

$$\Pi_{\alpha}(\xi)=\frac{[\alpha,\xi]}{[\alpha,\alpha]}\alpha$$

- 恒等变换（单位变换）：$\mathscr{E}(\alpha)=\alpha,\ \alpha\in V.$
- 零变换：$0(\alpha)=0,\ \alpha\in V.$
- 数乘变换：$\mathscr{K}(\alpha)=k\alpha.$
- 微商：$\mathscr{D}(f(x))=f'(x).$
- 积分：$\mathscr{J}(f(x))=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

注: 复数域上 $\mathscr{A}\xi=\bar{\xi}$ 不是线性变换.

性质

1. 设 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换，则 $\mathscr{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\mathscr{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$. 这是因为

$$\mathscr{A}(\mathbf{0})=\mathscr{A}(0\cdot\boldsymbol{\alpha})=0\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

$$\mathscr{A}(-\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}((-1)\boldsymbol{\alpha})=(-1)\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}).$$

2. 线性变换保持线性组合与线性关系式不变. 换句话说，如果 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合，即

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

那么经过线性变换 $\mathscr{A}$ 之后，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$ 是 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 同样的线性组合，即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r).$$

又如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 之间有一线性关系式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

那么它们的像之间也有同样的关系

$$k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathbf{0}.$$

以上两点，根据定义不难验证，由此即得

3. 线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.

7.2 线性变换的运算

乘积：$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha) \equiv \mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha))$.

- 乘积仍是线性变换
- 乘积满足结合律

和：$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha) = \mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{B}(\alpha)$.

- 和仍是线性变换
- 和满足结合律与交换律

数量乘法：$k\mathscr{A} = \mathscr{K}\mathscr{A}$.

- $(kl)\mathscr{A} = k(l\mathscr{A})$.
- $k(\mathscr{A}+\mathscr{B}) = k\mathscr{A} + k\mathscr{B}$.

逆变换：$\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{E}$.

- 逆变换仍是线性变换

乘方：$\mathscr{A}^{-n} = (\mathscr{A}^{-1})^n$.

- $\mathscr{A}^{m+n} = \mathscr{A}^m\mathscr{A}^n$.
- $(\mathscr{A}^m)^n = \mathscr{A}^{mn}$.

线性变换 $\mathscr{A}$ 的多项式

不难验证，如果在 $P[x]$ 中，

$$h(x)=f(x)+g(x), \quad p(x)=f(x)g(x),$$

那么

$$h(\mathscr{A})=f(\mathscr{A})+g(\mathscr{A}), \quad p(\mathscr{A})=f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}).$$

特别地，

$$f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=g(\mathscr{A})f(\mathscr{A}).$$

即同一个线性变换的多项式的乘法是可交换的.

例 1

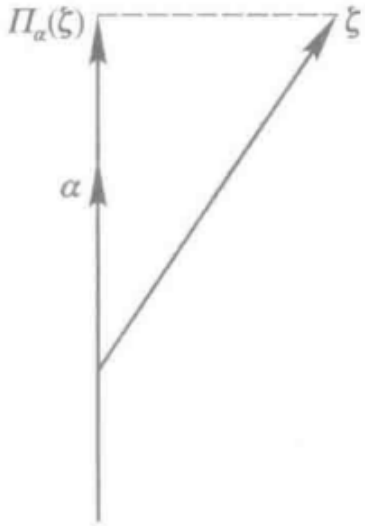


图 1

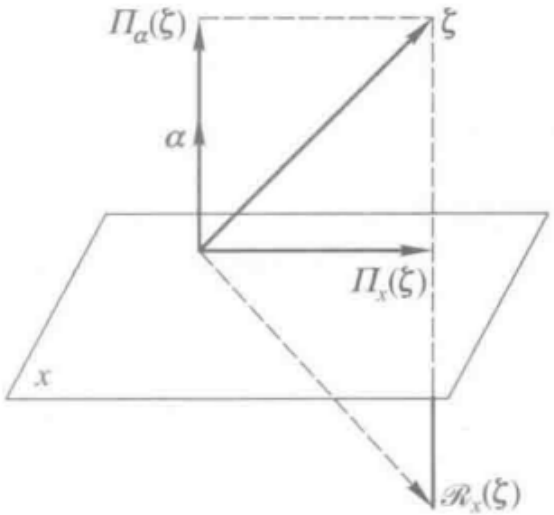


图 2

$$\Pi_\alpha(\xi)=\frac{(\alpha,\xi)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

$$\Pi_x(\xi)=\xi-\Pi_\alpha(\xi)\qquad \Pi_x=\mathscr{E}-\Pi_\alpha$$

$$\mathscr{R}_x(\xi)=\xi-2\Pi_\alpha(\xi)\qquad \mathscr{R}_x=\mathscr{R}-2\Pi_\alpha$$

$$\alpha\perp\beta\quad\Leftrightarrow\quad\Pi_\alpha\Pi_\beta=0$$

例 2

在 $P[\lambda]_n$ 中平移也是线性变换

$$f(\lambda)\to f(\lambda+a),\quad a\in P$$

也是一个线性变换，用 $\mathscr{S}_a$ 表示. 根据泰勒展开式

$$f(\lambda+a)=f(\lambda)+af'(\lambda)+\frac{a^2}{2!}f''(\lambda)+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda),$$

因之 $\mathscr{S}_a$ 实质上是 $\mathscr{D}$ 的多项式，即

$$\mathscr{S}_a=\mathscr{E}+a\mathscr{D}+\frac{a^2}{2!}\mathscr{D}^2+\cdots+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{D}^{n-1}.$$

7.3 线性变换的矩阵

定理 1：线性变换的存在性

> 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 中的一组基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中任一 n 个向量，则存在唯一的线性变换 $\mathscr{A}$ 使得 $\mathscr{A}\varepsilon_i=\alpha_i,\ i=1,2,\cdots,n.$

定义 2：基下的矩阵 A

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$$

定理 2：线性变换及其矩阵

定理 2 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，每个线性变换按公式(5)对应一个 $n\times n$ 矩阵. 这个对应具有以下的性质：

1）线性变换的和对应于矩阵的和；

2）线性变换的乘积对应于矩阵的乘积；

3）线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积；

4）可逆的线性变换与可逆矩阵对应，且逆变换对应于逆矩阵.

定理 3：坐标的变换

定理 3 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是 A，向量 ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\mathscr{A}\xi$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可以按公式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

计算.

定理 4：基变换公式

定理 4 设线性空间 V 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,$$

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$$

下的矩阵分别为 A 和 B，从基(6)到(7)的过渡矩阵是 X，于是 $B=X^{-1}AX$.

定义 3：相似 $A \sim B$

定义 3 设 A,B 为数域 P 上两个 n 阶矩阵，如果可以找到数域 P 上的 n 阶可逆矩阵 X，使得 $B=X^{-1}AX$，就说 A 相似于 B，记作 $A\sim B$.

相似是矩阵之间的一种关系，这种关系具有下面三个性质：

1. 自反性：$A\sim A$.

这是因为 $A=E^{-1}AE$.

2. 对称性：如果 $A\sim B$，那么 $B\sim A$.

如果 $A\sim B$，那么有 X 使 $B=X^{-1}AX$. 令 $Y=X^{-1}$，就有 $A=XBX^{-1}=Y^{-1}BY$，所以 $B\sim A$.

3. 传递性：如果 $A\sim B, B\sim C$，那么 $A\sim C$.

已知有 X,Y 使 $B=X^{-1}AX, C=Y^{-1}BY$. 令 $Z=XY$，就有 $C=Y^{-1}X^{-1}AXY=Z^{-1}AZ$，因之

定理 5

> 线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的；
>
> 两个相似的矩阵可以看作同一个线性变换在两组基下对应的矩阵.

性质

> 若 $B=X^{-1}AX$，则 $f(B)=X^{-1}f(A)X$.

7.4 特征值与特征向量

目的：找到一组基，使得它的矩阵具有最简单的形式.

几何意义：特征向量的方向经过线性变换后，保持在同一条直线上.

例子：

- 数乘变换 $\mathscr{K}$ 的特征值只有 k，每个非零向量都是其特征向量.
- 求导变换 $\mathscr{D}$ 的特征值只有 0，特征向量只能是常数.
- 旋转变换 $\mathscr{I}_\theta$ 在 $\theta\neq k\pi$ 时没有特征值.

定义：特征子空间：$V_{\lambda_0}=\{\alpha|\mathscr{A}\alpha=\lambda_0\alpha,\ \alpha\in V\}$.

- 特征子空间的维数 $=$ 属于 λ_0 的线性无关的特征向量的最大个数.

图论

命题 1

> 设一个有向图有 n 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，它的邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，令 $A^k=(b_{ij})_{n\times n}$，则从 v_i 到 v_j 的长为 k 的路的数目是 b_{ij}.

命题 2

> 有向图中长为 k 的回路的数目为 $\operatorname{tr}A^k=\sum\limits_{i=1}^n b_{ij}=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i^k$.

定理 6

> 相似矩阵有相同的特征多项式.（联系几何意义）

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\right|=\left|\boldsymbol{X}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\right|=\left|\boldsymbol{X}^{-1}\right||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{X}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$$

推论：相似矩阵有相同的 迹、行列式

线性变换的特征多项式，线性变换的行列式

特征多项式系数的规律

> 设 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-a_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_n$ 是 n 阶矩阵 A 的特征多项式，则 a_i 是矩阵 A 的 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 阶主子式直和.

推论：$a_1=\operatorname{tr}A$, $a_n=|A|$.

哈密顿 - 凯莱 定理

> 设 $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$, $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=O$.

证明：设 $\lambda R-A$ 的伴随矩阵为 $B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_0+\lambda^{n-2}B_1+\cdots+B_{n-1}$ (矩阵多项式)，则

$$B(\lambda)(\lambda E-A)=|\lambda E-A|E=f(\lambda)E$$

展开后比较系数，代入可得 $f(A)=O$.

推论：设 $\mathscr{A}$ 是有限维空间 V 的线性变换，$f(\lambda)$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征多项式，则 $f(\mathscr{A})=0$.

7.5 对角矩阵

定理 7

> 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的矩阵可以在某一组基下为对角矩阵的充要条件是，$\mathscr{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 8

> 属于不同特征值的特征向量线性无关.

推论 1：如果 n 维线性空间 V 中，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式在数域 P 中有 n 个不同的根，即 $\mathscr{A}$ 有 n 个不同的特征值，那么 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

推论 2：在复数域上的线性空间中，如果线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式没有重根，那么 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是对角形的.

定理 9：定理 8 的推广

> 如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值，而 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_1}(i=1,2,\cdots,k)$ 是属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量，那么向量组 $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$ 也线性无关.

推论 1： $\mathscr{A}$ 在某一组基下的矩阵成对角形的充要条件是，$\sum\limits_{i=1}^{r}\dim(V_{\lambda_i})=n$.

推论 2：若 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵是对角形，那么主对角线上元素除排列次序外是确定的，它们正式 A 的特征多项式的全部的根 (重根按重述计算).

7.6 线性变换的值域与核

定义 6：**值域** 与 **核**

定义 6 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的全体像组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的**值域**，用 $\mathscr{A}V$ 表示. 所有被 $\mathscr{A}$ 变成零向量的向量组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的**核**，用 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 表示:

若用集合的记号则 $\mathscr{A}V=\{\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}\mid\boldsymbol{\xi}\in V\}$，$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{\xi}\mid\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0},\boldsymbol{\xi}\in V\}$.

不难证明，线性变换的值域与核都是 V 的子空间. 事实上，由

$$\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}+\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})$$

可知，$\mathscr{A}V$ 对加法与数量乘法是封闭的，同时，$\mathscr{A}V$ 是非空的，因此 $\mathscr{A}V$ 是 V 的子空间. 由 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 与 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 可知

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}.$$

这就是说，$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 对加法与数量乘法是封闭的. 又因为 $\mathscr{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{0}\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$，即 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 是非空的. 因此，$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 是 V 的子空间.

- **值域**: $\mathscr{A}V=L(\eta_1,\eta_2,\cdots)$.
- **核**: $\mathscr{A}^{-1}(0)=L(\xi_1,\xi_2,\cdots)$.
- **秩**: $\mathrm{r}(\mathscr{A})=\dim(\mathscr{A}V)$.
- **零度**: $\ker(\mathscr{A})=\dim(\mathscr{A}^{-1}(0))$.

定理 10:

> 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，在这组基下的矩阵是 A，则
>
> 1. $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}V$ 是由基像组生成的子空间，即 $\mathscr{A}V=L(\mathscr{A}\varepsilon_1,\mathscr{A}\varepsilon_2,\cdots,\mathscr{A}\varepsilon_n)$;
> 2. $\mathrm{r}(\mathscr{A})=\mathrm{r}(A)$.

定理 11

> 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则 $\mathscr{A}V$ 的一组基的原像及 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 的一组基 合起来就是 V 的一组基，并且 $\mathrm{r}(\mathscr{A})+\ker(\mathscr{A})=n$.

推论：对于有限维线性空间的线性变换，单射 $\Leftrightarrow$ 满射.

注：$\mathscr{A}V+\mathscr{A}^{-1}(0)$ 不一定是整个空间.

例：设 $A\in M^{n\times n},A^2=A$，则 $A\sim\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots.0)$.

7.7 不变子空间

定义 7：不变子空间

定义 7 设$\mathscr{A}$是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间. 如果 W 中的向量在$\mathscr{A}$下的像仍在 W 中，换句话说，对于 W 中任一向量 $\boldsymbol{\xi}$，有$\mathscr{A}\boldsymbol{\xi}\in W$，我们就称 W 是$\mathscr{A}$的**不变子空间**，简称$\mathscr{A}$-**子空间**.

- 整个空间 V 和零子空间 $\{0\}$ 对于每个线性变换 $\mathscr{A}$ 都是 $\mathscr{A}$ −子空间.
- $\mathscr{A}$ 的值域与核都是 $\mathscr{A}$ −子空间.
- 若线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是可交换的，则 $\mathscr{B}$ 的核与值域都是 $\mathscr{A}$ −子空间.
- $f(\mathscr{A})$ 的值域与核都是 $\mathscr{A}$ −子空间 (因为可交换).
- 任何一个子空间都是数乘变换 $\mathscr{K}$ 的不变子空间.
- $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 也是 $\mathscr{A}$ −子空间.
- $\mathscr{A}$ −子空间的和与交还是 $\mathscr{A}$ −子空间.

不变子空间 W 上的线性变换：$\mathscr{A}|W$.

2）设 V 分解成若干个$\mathscr{A}$-子空间的直和，即

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s.$$

在每一个$\mathscr{A}$-子空间 W_i 中取基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{in_i},\quad i=1,2,\cdots,s, \tag{3}$$

并把它们合并起来成为 V 的一组基 I.则在这组基下，$\mathscr{A}$的矩阵具有准对角形状

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$就是$\mathscr{A}|W_i$在基(3)下的矩阵.

反之，如果线性变换$\mathscr{A}$在基 I 下的矩阵是准对角形(4)，则由(3)生成的子空间 W_i 是$\mathscr{A}$-子空间.

定理 12：哈密顿-凯莱定理的应用

定理 12 设线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，它可分解成一次因式的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则 V 可分解成不变子空间的直和

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

其中 $V_i=\{\boldsymbol{\xi}\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\xi}\in V\}$.

证明思路：

1. V_i 是 $\mathscr{A}-$子空间；
2. $\forall \alpha \in V, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, + \cdots, + \alpha_s,\ \alpha_i \in V_i,\ i = 1, 2, \cdots, s$；
3. 上述表示法唯一，即若有 $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_s = 0$，其中 $(\mathscr{A} - \lambda_i \mathscr{E})^{r_i} \beta_i = 0,\ i = 1, 2, \cdots, s$，则 $\beta_i = 0$.

定义 8：**根子空间** $V^{\lambda_i} = \{\xi \in V | (\mathscr{A} - \lambda_i \xi)^{r_i} \xi = 0\}$.

7.8 若尔当标准形

定义

若尔当块

$$\boldsymbol{J}(\lambda_0, k) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

若尔当形矩阵

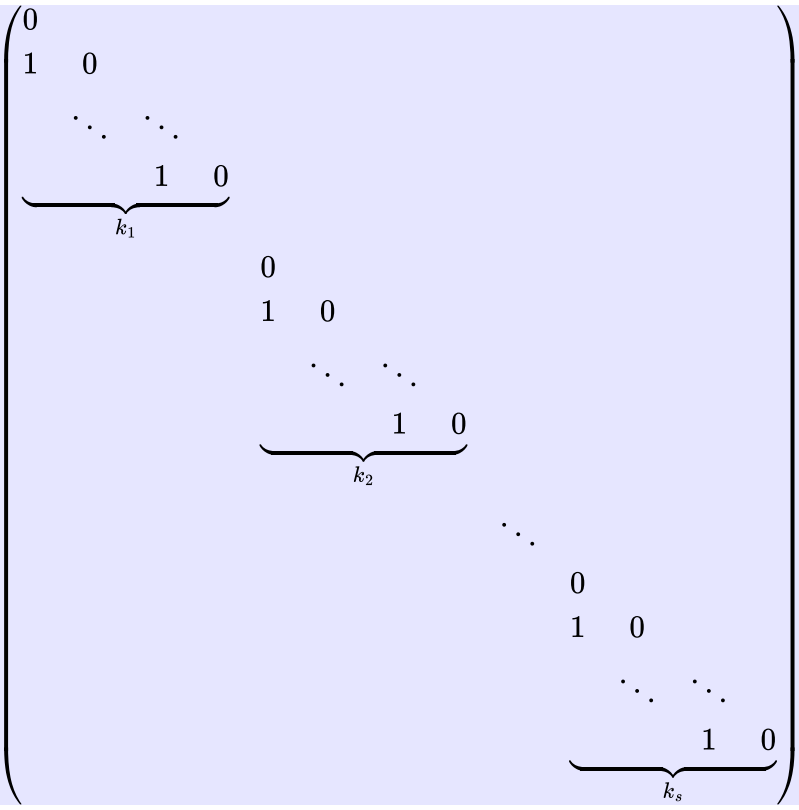
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}(\lambda_1, k_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}(\lambda_2, k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix}$$

引理

n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{B}^k = 0$, k 是某正整数,就称 $\mathscr{B}$ 为 V 上 **幂零线性变换**. 对幂零线性变换 $\mathscr{B}$, V 中必有下列形式的一组元素作为基:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \\ \mathscr{B}\alpha_1 & \mathscr{B}\alpha_2 & \cdots & \mathscr{B}\alpha_s \\ \mathscr{B}^{k_1-1}\alpha_1 & \mathscr{B}^{k_2-1}\alpha_2 & \cdots & \mathscr{B}^{k_s-1}\alpha_s \\ (\mathscr{B}^{k_1}\alpha_1 = 0) & (\mathscr{B}^{k_2}\alpha_2 = 0) & \cdots & (\mathscr{B}^{k_s}\alpha_s = 0) \end{array}$$

使得 $\mathscr{B}$ 在这组基下的矩阵为



定理 13

> 设 $\mathscr{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，则 V 中一定存在一组基，$\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵，称为 $\mathscr{A}$ 的若尔当标准形.

定理 14

> 每个 n 阶复矩阵 A 一定与一个若尔当形矩阵显示. 这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列顺序外由 A 唯一决定,称为 A 的若尔当标准形.

7.9 最小多项式

引理 1

> 矩阵 A 的最小多项式是唯一的

引理 2

> 设 $g(x)$ 是矩阵 A 的最小多项式,那么 $f(x)$ 以 A 为根的充要条件是 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

例

- 数量矩阵 kE 的最小多项式为 $x-k$; 若 A 的最小多项式是 1 次多项式,那么 A 一定是数量矩阵
- 若 A 与 B 相似, 则 $f(A)=O \Leftrightarrow f(B)=O$.

  最小多项式相同的矩阵不一定相似

引理 3

设准对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, A_1 和 A_2 的最小多项式分别为 $g_1(x)$, $g_2(x)$, 那么 A 的最小多项式为最小公倍式 $[g_1(x),g_2(x)]$.

引理 4

k 阶若尔当块

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & a & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$$

的最小多项式为 $(x-a)^k$.

定理 15

数域 P 上 n 阶矩阵 A 与 **对角矩阵相似** 的充要条件是, A 的最小多项式是 P 上 **互素** 的 **一次因式** 的乘积.

推论

复矩阵 A 与对角阵相似的充要条件是 A 的最小多项式 **没有重根**.

平面直角坐标系可表示为 $[O;\varepsilon_1,\varepsilon_2]$.

习题与定理

1. 若 $\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$, 则 $\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k=k\mathscr{A}^{k-1}$, $k>1$.

2. 可逆变换是双射.

单射: $\mathscr{A}\alpha=\mathscr{A}\beta\Rightarrow\alpha=\beta$.

满射: $\forall\alpha,\exists\beta=\mathscr{A}^{-1}\alpha,\mathrm{s.t.}\ \mathscr{A}\beta=\alpha$.

3. 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 若 $\mathscr{A}^{k-1}\xi\neq0,\mathscr{A}^k=0$, 则 $\xi,\mathscr{A}\xi,\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(k>0)$ 线性无关. 且 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, 则

- V 上的与全体线性变换可交换的线性变换是数乘变换.
- 若 $\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同,那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

证明 取 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,设 $\mathscr{A}$ 在该基下矩阵为 $\boldsymbol{A}$.我们证明 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

取可逆矩阵 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$,则对固定的 i,j,

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})$$

是一组基.于是 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij}).$$

但由题设它的矩阵也为 $\boldsymbol{A}$,于是

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})=\boldsymbol{A} \quad 或 \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ij})\boldsymbol{A}.$$

由 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}$,故 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 对任何 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 成立.于是任何

$$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

与 $\boldsymbol{A}$ 可交换.由第四章习题 7 的 3),知 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵,从而 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

5. 若 $\beta=\alpha C,\mathscr{A}\alpha=\beta$, 则 $\mathscr{A}\alpha=\alpha C,\mathscr{A}\beta=\beta C$.

6. 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

7. 若 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 则 $\begin{pmatrix}A & O\\ O & C\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}B & O\\ O & D\end{pmatrix}$ 相似.

8. 在 $P[x]_n(n>1)$ 中, 微分变换 $\mathscr{D}$ 的特征多项式为 λ^{n-1}.

9. 设 λ_1,λ_2 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个不同特征值, $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量,则 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量.

10. 若线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量, 那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变化. (利用 9., 只能有一个特征值)

11. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 V 上的线性变换, 且 $\mathscr{AB}=\mathscr{BA}$, 则:

    1. 如果 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一特征值, 那么 V_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间;

$$\mathscr{AB}\alpha=\mathscr{BA}\alpha=\lambda_0\mathscr{B}\alpha$$

2. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

12. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, 而线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$的矩阵是一若尔当块,则

1. V 中包含 ε_1 的 $\mathscr{A}-$子空间只有 V 自身;
2. V 中任一非零 $\mathscr{A}-$子空间都包含 ε_n;
3. V 不能分解成两个非平凡的 $\mathscr{A}-$子空间的直和.

13. 证明: n 维线性空间中全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的.

14. 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换, 则:

1. 在 $P[x]$ 中有一个次数 $\leq n^2$ 的多项式 $f(x)$, 使 $f(\mathscr{A})=0$;

$$\text{即 } a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+a_2\mathscr{A}^2+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}$$

$$\text{或者说 } \mathscr{E}, \mathscr{A}, \mathscr{A}^2, \cdots, \mathscr{A}^{n^2} \text{是线性相关的}(\text{共 } n^2+1 \text{ 个向量})$$

2. 如果 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$, $g(\mathscr{A})=\mathscr{O}$, $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大公因式, 则 $d(\mathscr{A})=\mathscr{O}$; (贝祖定理)
3. $\mathscr{A}$ 可逆的充要条件是, 有一常数项不为零的多项式 $f(x)$, 使得 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

3) 必要性. 由 1), 有 $a_0, a_1, \cdots, a_{n^2}$ 不全为零, 使

$$a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}.$$

设 a_i 是 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 中第一个不为零的数, 由 $\mathscr{A}$ 可逆, 这个 $i\neq n^2$. 否则有 $a_{n^2}\neq 0$ 及 $\mathscr{A}^{n^2}\neq\mathscr{O}$, 但 $a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{O}$, 这是不可能的. 故 $i<n^2$, 于是

$$a_i\mathscr{A}^i+a_{i+1}\mathscr{A}^{i+1}+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}=\mathscr{A}^i(a_i\mathscr{E}+a_{i+1}\mathscr{A}+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2-i})=\mathscr{O}.$$

因 $\mathscr{A}^i$ 可逆, 就有 $a_i\mathscr{E}+a_{i+1}\mathscr{A}+\cdots+a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2-i}=\mathscr{O}$. 令

$$f(x)=a_i+a_{i+1}x+\cdots+a_{n^2}x^{n^2-i},$$

则常数项 $a_i\neq 0$, 且 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

充分性. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$, $a_0\neq 0$, 使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$, 写出来就是

$$a_0\mathscr{E}+a_1\mathscr{A}+\cdots+a_k\mathscr{A}^k=\mathscr{O}.$$

于是

$$\mathscr{A}(a_1\mathscr{E}+a_2\mathscr{A}+\cdots+a_k\mathscr{A}^{k-1})=-a_0\mathscr{E},$$

$$\mathscr{A}\left(-\frac{a_1}{a_0}\mathscr{E}-\frac{a_2}{a_0}\mathscr{A}-\cdots-\frac{a_k}{a_0}\mathscr{A}^{k-1}\right)=\mathscr{E},$$

即 $\mathscr{A}$ 是可逆变换.

15. 对任一 $n\times n$ 复矩阵 A, 存在可逆矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 是上三角形矩阵.

16. 如果 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_s$ 是线性空间 V 上的 s 个两两不同的线性变换, 那么在 V 中比存在向量 α, 使 $\mathscr{A}_1\alpha, \mathscr{A}_2\alpha, \cdots, \mathscr{A}_s\alpha$ 也两两不同.

17. 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 上的线性变换, W 是 V 的子空间, $\mathscr{A}W$ 表示由 W 中向量的像组成的子空间, 则:

$$\dim(\mathscr{A}W) + \dim(\mathscr{A}^{-1}(0) \cap W) = \dim(W).$$

提示 因 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}) \cap W \subset W$, 取 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}) \cap W$ 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s$, 把它扩充成 W 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r$. 证明 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 是 $\mathscr{A}W$ 的一组基.

证明 按提示的方法取 W 的基, 则

$$\mathscr{A}W = L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_s, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r).$$

因 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s \in \mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$, $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \cdots = \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{0}$, 故

$$\mathscr{A}W = L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r).$$

设 $l_{s+1}\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1} + l_{s+2}\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2} + \cdots + l_r\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{0}$, 则

$$\mathscr{A}(l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1} + l_{s+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2} + \cdots + l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r) = \mathbf{0}.$$

于是 $l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1} + l_{s+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2} + \cdots + l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r \in \mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$. 它又须是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s$ 的线性组合, 就有一组数 $l_1, l_2, \cdots, l_s$ 使

$$l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1} + l_{s+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2} + \cdots + l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r = l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + l_s\boldsymbol{\varepsilon}_s,$$

或

$$l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \cdots + l_s\boldsymbol{\varepsilon}_s - l_{s+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1} - \cdots - l_r\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{0}.$$

又由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性无关, 故 $l_1 = l_2 = \cdots = l_r = 0$. 特别地 $l_{s+1} = l_{s+2} = \cdots = l_r = 0$, 证明了 $\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+1}, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{s+2}, \cdots, \mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 线性无关, 因而是 $\mathscr{A}W$ 的一组基.

现在维$(\mathscr{A}W) = r - s$, $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}) \cap W = s$, 维$(W) = r$, 故

18. 设 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$, $\mathscr{B}^2 = \mathscr{B}$, 则:

1. $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同值域的充要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}$, $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}$;

2. $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同的核的充要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}$, $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}$;

证明 1) 充分性. 已知 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}$ 及 $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}$, 则

$$\mathscr{A}V = \mathscr{B}\mathscr{A}V \subset \mathscr{B}V \quad 及 \quad \mathscr{B}V = \mathscr{A}\mathscr{B}V \subset \mathscr{A}V,$$

故 $\mathscr{A}V = \mathscr{B}V$.

必要性. 已知 $\mathscr{A}V = \mathscr{B}V$, 即 $\forall\, \boldsymbol{\alpha} \in V$, 有 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使 $\mathscr{B}\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{B}(\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}) = \mathscr{B}^2\boldsymbol{\beta} = \mathscr{B}\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}.$$

故 $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}$. 同样可证 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}$.

2) 充分性. 已知 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}$ 及 $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{B}$. 取 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, 使 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. 若 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 使 $\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 则 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathscr{A}\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. 故 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$.

必要性. 已知 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}) = \mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$. 对 $\forall\, \boldsymbol{\beta} \in V$, 由

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}^2\boldsymbol{\beta} = \mathscr{A}\boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

得 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta} - \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = \mathscr{B}\boldsymbol{\beta} - \mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, 即 $\mathscr{B}\boldsymbol{\beta} = \mathscr{B}\mathscr{A}\boldsymbol{\beta}$, 故 $\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. 同样可证 $\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B}$.

第 8 章

8.1 $\lambda-$矩阵

定理 1

> $n \times n$ 的 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $|A(\lambda)|$ 是一非零常数.

8.2 $\lambda-$矩阵在初等变换下的标准形

引理

> 设 $\lambda-$矩阵的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$, 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽, 那么一定可以找到一个与 $A(\lambda)$ 等价的矩阵 $B(\lambda)$, 它的左上角元素也不为零, 但是次数比 $a_{11}(\lambda)$ 的次数低.

定理 2

> 任意一个非零的 $s \times n$ 的 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于一个下述形式的矩阵 (**标准形**):
>
> $$\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
>
> 其中 $r \geq 1, d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式, 且
>
> $$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda),\ i=1,2,\cdots,r-1.$$

8.3 不变因子

定义 5: k 阶 **行列式因子**

> 设 $\lambda-$矩阵 (λ) 的秩为 r, 对于正整数 $k(1 \leq k \leq r)$, $A(\lambda)$ 中必有非零的 k 阶子式, $A(\lambda)$ 中全部 k 阶子式的首相系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子.

- 行列式因子在初等变换下不变

定理 3

> 等价的 $\lambda-$矩阵具有相同的秩与相同的各阶行列式因子.

- 标准形的 k 阶行列式因子是 $d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$.

定理 4

> $\lambda-$矩阵的标准形是唯一的.

$$A(\lambda):\ D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda),\ k=1,2,\cdots,r.$$
$$\text{标准形}:\ d_1\lambda=D_1(\lambda), d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

定义 6: 不变因子

> 标准形的主对角线上非零元素 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子.

定理 5

> 两个 $\lambda-$矩阵等价的充要条件是它们有相同的行列式因子,或者它们有相同的不变因子.

⭐ 可逆矩阵的标准形是单位矩阵 E; 与单位矩阵等价的矩阵一定可逆.

定理 6

> 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是, 它可以表成一些初等矩阵的乘积.

推论

> 两个 $s\times n$ 的 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是, 存在 s 阶可逆矩阵 $P(\lambda)$ 与 n 阶可逆矩阵 $Q(\lambda)$, 使得
>
> $$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$$

8.4 矩阵相似的条件

引理 1

> 如果有 $n\times n$ 数字矩阵 P_0,Q_0, 使得 $\lambda E-A=P_0(\lambda E-B)Q_0$, 则 A 与 B 相似.

- 注意 λ 是一个变量, 比较系数知: $P_0Q_0=E,\ A=P_0BP_0^{-1}$.

引理 2

> 对于任何不为零的 $n\times n$ 数字矩阵 A 和 $\lambda-$矩阵 $U(\lambda)$ 与 $V(\lambda)$, 一定存在 $\lambda-$矩阵 $Q(\lambda)$ 与 $R(\lambda)$ 以及数字矩阵 U_0 和 V_0, 使得
>
> $$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0$$
> $$V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0$$

- 展开 $U(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ 即得.

定理 7

> 设 A,B 是数域 P 上两个 $n\times n$ 矩阵, A 与 B 相似的充要条件是, 它们的特征矩阵 $\lambda E-A$ 和 $\lambda E-B$ 等价.

- $\lambda E-A$ 的不变因子简称为 A 的不变因子.

推论

> 矩阵 A 和 B 相似的充要条件是, 它们有相同的不变因子.

不变因子是矩阵的相似不变量, 因此可以定义线性变换的不变因子

8.5 初等因子

定理 8

> 两个同阶复矩阵相似的充要条件是, 它们有相同的初等因子.

引理 1

> 如果多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素, 那么
>
> $$(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda)) = (f_1(\lambda), f_2(\lambda)) \cdot (g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

引理 2

> 设
>
> $$A(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$
> $$B(\lambda) = \begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}.$$
>
> 如果多项式 $f_1(\lambda), f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 互素, 那么 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价.

定理 9

> 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda E - A$ 为对角形, 然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积, 则所有这些一次因式的方幂 (相同的按出现的次数计算) 就是 A 的全部初等因子.

8.6 若尔当标准形的理论推导

若尔当块的初等因子是 $(\lambda - \lambda_0)^n$.

定理 10

> 每个 n 阶复矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似, 这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵 A 唯一决定的, 它称为 A 的若尔当标准形.

定理 11

> 设 $\mathscr{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 在 V 中必定存在一组基, 使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当标准形, 并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $\mathscr{A}$ 唯一决定的.

定理 12

> 复矩阵 A 与对角阵相似的充要条件是, A 的初等因子全是一次的.

定理 13

> 复矩阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是, A 的不变因子都没有重根.

8.7 矩阵的有理标准形

定义 8: 友矩阵

> 对数域 P 上的一个多项式 $d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$, 称矩阵
>
> $$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$
>
> 为多项式 $d(\lambda)$的 **友矩阵**.

- $|A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots a_{n-1}\lambda+a_n=d(\lambda).$
- A 有一个 $n-1$ 阶子式等于 $(-1)^{n-1}\neq 0.$
- $\lambda E-A$ 的不变因子是 $1,1,\cdots,1,d(\lambda).$

  另证: 从最后一行逐次乘 λ 后加到前一行上

定义 9: 有理标准形

> 准对角矩阵
>
> $$A=\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix},$$
>
> 其中 A_i 分别是数域 P 上某些多项式 $d_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的友矩阵, 且满足 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)|\cdots|d_s(\lambda)$, 称为 P 上的 **有理标准形矩阵**.

引理

> 上述矩阵 A 的不变因子为 $1,1,\cdots,1,d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$, 其中 1 的个数等于 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$ 的次数之和减去 s.

定理 14

> 数域 P 上 $n\times n$ 方阵 A 在 P 上相似与唯一的一个有理标准形, 称为 A 的有理标准形.

定理 15

> 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间的线性变换, 则在 V 中存在一组基, 使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵是有理标准形, 并且这个有理标准形由 $\mathscr{A}$ 唯一决定, 称为 $\mathscr{A}$ 的有理标准形.

习题与定理

求标准形或不变因子

- 初等变换
- 求 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$.
- 求初等因子

1. 设 A 是数域 P 上一个 $n \times n$ 矩阵, 则 A 与 A^{T} 相似.

即证 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A^{\mathrm{T}}$ 等价, 而 $\lambda E - A^{\mathrm{T}} = (\lambda E - A)^{\mathrm{T}}$, 二者对应子式互为转置, 故相等, 即 二者有相同的行列式因子, 故二者等价.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^k.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B + C$$

则 B 与 C 可交换, 且 $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^n = O, n \geq 3$

$$\begin{aligned} A^k &= B^k + kB^{k-1}C + \frac{k(k-1)}{2}B^{k-2}C^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明:
   1. 若 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组基下矩阵 A 是多项式 $d(\lambda)$ 的友矩阵, 则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $d(\lambda)$;

      即证 $E, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ 线性无关.
   2. 设 $\mathscr{A}$ 的最高次的不变因子是 $d(\lambda)$, 则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $d(\lambda)$.

      利用有理标准形矩阵

第 9 章 欧几里得空间

9.1 定义与基本性质

定义 1: 欧几里得空间

> 设 V 是实数域 R 上一线性空间, 在 V 上定义了一个二元实函数, 称为 **内积**, 记作 (α,β), 它具有以下性质:
>
> 1. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;
> 2. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;
> 3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;
> 4. $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时, $(\alpha,\alpha)=0$.
>
> 这样的线性空间 V 称为 **欧几里得空间**.

- e.g. $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
- **长度**: $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$.
- **柯西-布尼亚科夫斯基不等式**: $|(\alpha,\beta)|^2\leq|\alpha|\,|\beta|$.
  - $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$.
  - $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$.
- **夹角**: $\cos<\alpha,\beta>=\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|}$.
- **正交**: $\alpha\perp\beta:(\alpha,\beta)=0$.
- **勾股定理**: $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$.
  - 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 两两正交, 那么

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_m|^2$$

- 对于 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots x_n\varepsilon_n$, $\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$,

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j\equiv\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j=X^{\mathrm{T}}AY$$

  其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

  称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵.
  - ☆ 若 $\eta=\varepsilon C$, 则 η 的度量矩阵为 $B=C^{\mathrm{T}}AC$.
  - 度量矩阵是正定的对称矩阵. 由此可以证明任意欧氏空间都存在标准正交基.

9.2 标准正交基

定理 1

> n 维欧氏空间中任一个正交向量组都能扩充成一组正交基.

定理 2

> 对于 n 维欧氏空间中任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 都可以找到一组标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, 使得 $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_i) = L(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_i), , i = 1, 2, \cdots, n.$

- 即要求 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过度矩阵是上三角形的.
- 施密特正交化过程

$$\xi_{m+1} = \varepsilon_{m+1} - \frac{(\varepsilon_{m+1}, \xi_1)}{(\xi_1, \xi_1)}\xi_1 - \cdots - \frac{(\varepsilon_{m+1}, \xi_m)}{(\xi_m, \xi_m)}\xi_m$$

$$\eta_i = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

定义 7

> n 阶实矩阵 A 称为 **正交矩阵**, 如果 $A^{\mathrm{T}}A = E$

- 由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵;
- 若第一组基石标准正交基, 过渡矩阵正交, 那么第二组基也是标准正交基.

9.3 同构

定义 8

> 实数域 $\mathbb{R}$ 上欧氏空间 V 与 V' 称为 **同构** 的, 如果由 V 到 V' 有一个双射 σ 满足:
>
> 1. $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$;
> 2. $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$;
> 3. $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

- 同构的欧氏空间有相同的维数.
- 每个 n 维欧氏空间都与 $\mathbb{R}^n$ 同构.
- 同构具有自反性, 对称性, 传递性.

定理 3

> 两个有限维欧氏空间同构的充要条件是它们的维数相同.

9.4 正交变换

定义 9

> 欧氏空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为 **正交变换**, 如果它保持向量的内积不变, 即对于任意的 $\alpha, \beta, \in V$, 都有 $(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$.

定理 4

> 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换, 则以下命题相互等价:
>
> 1. $\mathscr{A}$ 是正交变换;
> 2. $\mathscr{A}$ 具有保范性: $\forall \alpha \in V, |\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|$;
> 3. 若 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是标准正交基, 那么 $\mathscr{A}\varepsilon_1, \mathscr{A}\varepsilon_2, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n$ 也是标准正交基.
> 4. $\mathscr{A}$ 在任意一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

正交变换 $AA^{\mathrm{T}} = E \Rightarrow |A|^2 = 1$

- 若 $|A| = 1$, 则称为 **第一类正交变换 (旋转)**;
- 若 $|A| = -1$, 则称为 **第二类正交变换 (翻转)**.

9.5 子空间

定义 10

> 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 中两个子空间, 如果对于任意的 $\alpha \in V_1, \beta \in V_2$, 恒有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 V_1, V_2 为 **正交** 的, 记为 $V_1 \perp V_2$.
>
> 一个向量 α, 如果对于任意的 $\beta \in V_1$, 恒有 $(\alpha, \beta) = 0$, 则称 α 与子空间 V_1 **正交**, 记为 $\alpha \perp V_1$.

- $V_1 \perp V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;
- $\alpha \perp V_1, \alpha \in V_1 \Rightarrow \alpha = \mathbf{0}$.

定理 5

> 如果子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 两两正交, 那么和 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$ 是直和.

定义 11

> 子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个 **正交补**, 如果 $V_1 \perp V_2$, 并且 $V_1 + V_2 = V$.

- $\dim(V_1) + \dim(V_1^{\perp}) = n$.

定理 6

> n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补.

推论

> $V_1^{\perp}$ 恰由所有与 V_1 正交的向量组成.

由于 $\forall \alpha \in V, \exists \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2^{\perp}, \mathrm{s.t.}\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 故称 α_1 为 向量 α 在子空间 V_1 上的 **内射影**.

9.6 实对称矩阵的标准形

引理 1

> 设 A 是实对称矩阵, 则 A 的特征值皆为实数.

引理 2

> 设 A 是实对称矩阵, $\mathscr{A}$ 的定义如上, 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, 有 $(\mathscr{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}\beta)$ 或 $\beta^{\mathrm{T}}(A\alpha) = \alpha^{\mathrm{T}} A\beta$.

定义 12

> 欧氏空间中满足 $(\mathscr{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}\beta)$ 的线性变换称为 **对称变换**.

引理 3

> 设 $\mathscr{A}$ 是对称变换, V_1 是 $\mathscr{A}-$子空间, 则 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}-$子空间.

证明　设 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$, 要证 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$, 即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \perp V_1$. 任取 $\boldsymbol{\beta} \in V_1$, 都有 $\mathscr{A}\boldsymbol{\beta} \in V_1$. 因 $\boldsymbol{\alpha} \perp V_1$, 故 $(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = 0$. 因此

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}\boldsymbol{\beta}) = 0,$$

即 $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \perp V_1$, $\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$, $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}-$子空间. ▌

引理 4

> 设 A 是实对称矩阵, 则 $\mathbb{R}^n$ 中属于 A 的不同特征值的特征向量必正交.

定理 7

> 对于任意一个 n 阶实对称矩阵 A, 都存在一个 n 阶正交矩阵 T, 使得 $T^{\mathrm{T}}AT = T^{-1}AT$ 成对角形.

定理 8

> 任意一个实二次型
>
> $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,\ a_{ij} = a_{ji}$$
>
> 都可以经过正交线性替换变成平方和
>
> $$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots \lambda_n y_n^2,$$
>
> 其中平方项的系数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 就是矩阵 A 的特征多项式的全部根.

9.7 向量到子空间的距离

定义 13

> 长度 $|\alpha - \beta|$ 称为向量 α 和 β 的距离, 记为 $d(\alpha, \beta)$.

- $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$;
- $d(\alpha, \beta) \geq 0$;
- $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$.

最小二乘法

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix},\ Y=AX=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{s} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{s} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{s} a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

找 X 使(1)最小,就是在 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 中找一向量 Y,使得 B 到它的距离比到子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 中其他向量的距离都短.

应用前面所讲的结论,设

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

是所要求的向量,则

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AX}$$

必须垂直于子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.为此只需而且必须

$$(\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha}_2)=\cdots=(\boldsymbol{C},\boldsymbol{\alpha}_s)=0.$$

回忆矩阵乘法规则,上述一串等式可以写成矩阵相乘的式子,即

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=0,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=0.$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}}$ 按行正好排成矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,上述一串等式合起来就是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{0},$$

或

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}.$$

这就是最小二乘解所满足的代数方程,它是一个线性方程组,系数矩阵是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,常数项是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.这种线性方程组总是有解的.(参见第五章习题 17.)

9.8 酉空间介绍

即复数域上的欧氏空间

定义 14

> 设 V 是复数域上的线性空间, 在 V 上定义了一个二元复函数, 称为内积, 记作 (α,β), 它具有以下性质:
>
> 1. $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$;
> 2. $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;
> 3. $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;
> 4. $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 取等 .

> 这样的线性空间称为 **酉空间**.

- e.g. $(\alpha,\beta)=a_1\overline{b}_1+a_2\overline{b}_2+\cdots+a_n\overline{b}_n$.

性质与定义

- $(\alpha,k\beta)=\overline{b}(\alpha,\beta)$;
- $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$;
- $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$;
- $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha|\,|\beta|$, 当且仅当 α,β 线性相关时取等;
- 正交 (相互垂直): $(\alpha,\beta)=0$;
- 任意一组线性无关的向量可以用施密特过程正交化, 并扩充成一组标准正交基;
- **酉矩阵**: $\overline{A}^{\mathrm{T}}A=A\overline{A}^{\mathrm{T}}=E$. 两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵;
- **酉变换**: $(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta)$. 酉变换在标准正交基下的矩阵是酉矩阵;
- **埃尔米特矩阵**: $\overline{A}^{\mathrm{T}}=A$. 若线性变换的矩阵是埃尔米特矩阵, 那么它也是对称变换, 即 $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)$.
- V 是酉空间, V_1 是子空间, $V_1^{\perp}$ 是其正交补, 则 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}$, 且 $V_1^{\perp}$ 也是不变子空间.
- 埃尔米特矩阵的特征值为实数, 它的属于不同特征值的特征向量必正交.
- 若 A 是埃尔米特矩阵, 则有酉矩阵 C, 使得 $C^{-1}AC=\overline{C}^{\mathrm{T}}AC$ 是对角矩阵.
- 设 A 为埃尔米特矩阵, 二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{x}_j=X^{\mathrm{T}}A\overline{X}$$

  叫做埃尔米特二次型. 必有酉矩阵 C, 当 $X=CY$ 时,

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1y_1\overline{y}_1+d_2y_2\overline{y}_2+\cdots+d_ny_n\overline{y}_n.$$

习题与定理

1. 利用不同的内积推出不同形式的柯西-布尼亚科夫斯基不等式.

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶正定矩阵，而

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积为

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

1）证明：在这个定义之下，$\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间；

2）求单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$ 的度量矩阵；

3）具体写出这个空间中的柯西-布尼亚科夫斯基不等式.

证明 1）逐条验证内积定义.

(i) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

(ii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=k(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

(iii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

所以这样的 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 满足内积的条件，在这个定义之下，$\mathbf{R}^n$ 成一欧氏空间.

2）度量矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

3）$\left|\sum_{i,j}a_{ij}x_iy_j\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}y_iy_j}$.

2. 三角形不等式: $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$; 距离的不等式: $d(\alpha,\gamma)\leq d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一组向量,

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

证明: 当且仅当 $|\Delta|\neq 0$ 时, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

联系度量矩阵

4. 上三角形的正交矩阵必为对角矩阵, 且对角形上的元素为 1 或 -1.

5. 设 A 为一个 n 阶实矩阵, 且 $|A|\neq 0$, 证明 A 可分解成

$$A=QT,$$

其中 Q 是正交矩阵, T 是上三角形矩阵, 即

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

且 $t_{ii}>0(i1,2,\cdots,n)$, 并且这个分解式唯一的.

提示. 利用斯密特过程正交化、单位化，假设可以用两种方法表示，利用上一题结果证伪.

6. 设 A 为一个 n 阶正定矩阵, 证明存在一上三角形矩阵 T, 使得

$$A=T^{\mathrm{T}}T$$

proof: $A=P^{\mathrm{T}}P=(QT)^{\mathrm{T}}QT=T^{\mathrm{T}}T$.

7. 设 η 是 n 维欧氏空间 V 中一单位向量, 定义变换 $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta.$$

证明:

1. $\mathscr{A}$ 是正交变换, 这样的正交变换称为 **镜面反射**;
2. $\mathscr{A}$ 是第二类的;
3. 如果 n 维欧氏空间中, 正交变换 $\mathscr{A}$ 以 1 作为一个特征值, 且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 的维数为 $n-1$, 那么 $\mathscr{A}$ 是镜面反射.

提示: 扩充基后求基下的矩阵; 若两个变换对所有向量的作用相同, 那么这两个变换相同.

8. ☆ 实反称矩阵的特征值是零或纯虚数.

$$\begin{aligned}\overline{\xi}^{\mathrm{T}}A\xi&=-\overline{\xi}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\xi=-\left(\overline{A\xi}\right)^{\mathrm{T}}\xi=-\overline{\lambda}_0\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi\\&=\overline{\xi}^{\mathrm{T}}(\lambda_0\xi)=\lambda_0\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi\end{aligned}$$

9. ☆ 设 A 是 n 阶实矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 为三角形矩阵的充要条件是 A 的特征值均为实数.

10. 设 A,B 都是实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT=B$ 的充要条件是 A,B 的特征值全部相同.

11. 如果 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间的一个正交变换, 那么 $\mathscr{A}$ 的不变自空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证明: 设 $\alpha\in V_1^{\perp},\beta\in V_1$, 则 $\exists\gamma\in V_1,\mathrm{s.t.}\ \mathscr{A}\gamma=\beta$, 故

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\gamma)=(\alpha,\gamma)=0$$

12. 欧氏空间 V 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为 **反称** 的, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in V$,

$$(\mathscr{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathscr{A}\beta)$$

证明:

1. $\mathscr{A}$ 为反称的充要条件是, $\mathscr{A}$ 在一组标准正交基下的矩阵为反称矩阵;
2. 如果 V_1 是反称线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间, 则 $V_1^{\perp}$ 也是.

思路:

1. $(\mathscr{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = a_{ji}, (\mathscr{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i) = a_{ij}$;
2. 设 $\alpha \in V_1^{\perp}, \beta \in V_1$, 则 $(\mathscr{A}\alpha, \beta) = -(\alpha, \mathscr{A}\beta) = 0$.

13. 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间, 则

$$\begin{aligned}(V_1 + V_2)^{\perp} &= V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \\ (V_1 \cap V_2)^{\perp} &= V_1^{\perp} + V_2^{\perp}\end{aligned}$$

14. 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个变换. 证明: 如果 $\mathscr{A}$ 保持内积不变, 即对于 $\alpha, \beta \in V, (\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$, 那么它一定是线性的, 因而也是正交变换.

- 思路 1: $(\mathscr{A}(\alpha + \beta), \mathscr{A}\gamma) = (\mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta, \mathscr{A}\gamma)$. 这样似乎行不通, 因为我们不知道 $\mathscr{A}V$ 的秩.
- 思路 2: $|\mathscr{A}(k\alpha + l\beta) - k\mathscr{A}\alpha - l\mathscr{A}\beta|^2 = 0$.

15. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中两个向量组, 证明存在一正交变换 $\mathscr{A}$, 使得

$$\mathscr{A}\alpha_i = \beta_i,\ i = 1, 2, \cdots, m$$

的充要条件为

$$(\alpha_i, \alpha_i) = (\beta_i, \beta_j),\ i, j = 1, 2, \cdots, m.$$

充分性 **证明**: 令

$$\begin{aligned}\alpha &= x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n, \\ \mathscr{A}\alpha &= x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n\end{aligned}$$

则 $\mathscr{A}\alpha_i = \beta_i,\ i = 1, 2, \cdots, n$, 对于 V 中任意一个向量 β:

$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$$

$$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)$$

所以 $\mathscr{A}$ 是一个正交变换.

16. 设 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 A, λ 是 A 的特征多项式的根, 证明: 存在 R^n 中的非零向量 $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n)$, 使得

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_n) = \lambda(\overline{x}_1^2, \overline{x}_2^2, \cdots, \overline{x}_n^2).$$

提示: 注意到 $A\xi = \lambda\xi,\ f(\xi) = \xi^{\mathrm{T}} A\xi = \lambda\xi^{\mathrm{T}}\xi$.

17. ☆ 设 α, β 是 n 维欧氏空间中两个不同的单位向量

    1. 证明: 存在一镜面反射 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}(\alpha) = \beta$;
    2. 证明: n 维欧氏空间 V 中任一正交变换都可以表成一系列镜面反射的乘积.

第 10 章 双线性函数与辛空间

10.1 线性函数

定义 1

> 设 V 是数域 P 上的一个线性空间, f 是 V 到 P 的一个映射, 如果 f 满足
>
> 1. $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$;
> 2. $f(k\alpha)=kf(\alpha)$.
>
> 其中 α,β 是 V 中任一元素, k 是 P 中任意数, 则称 f 为 V 上的一个 **线性函数**.

性质

- $f(\mathbf{0})=f(0\alpha)=0f(\alpha)=0$.
- 如果 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s$, 那么 $f(\beta)=k_1f(\alpha_1)+k_2f(\alpha_2)+\cdots+k_sf(\alpha_s)$.

定义: 零函数

例子

- $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$.
- 矩阵的迹: $\mathrm{tr}(A)$.
- $L_t(p(x))=p(t)$.

定理 1

> 设 V 是 P 上一个 n 维线性空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 P 中任一 n 个数, 存在唯一的 V 上线性函数 f, 使得
>
> $$f(\varepsilon_i)=a_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

10.2 对偶空间

数域 P 中 n 维线性空间 V 上全体线性函数组成的集合记作 $L(V,P)$. 在正常定义的加法与数量乘法下, $L(V,P)$ 称为数域 P 上的线性空间.

取定 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 作 V 上 n 个线性函数如下:

$$f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & j=i;\\ 0, & j\neq i,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则对于 V 中向量 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$, 有

$$f_i(\alpha)=x_i.$$

引理

对 V 中任一向量 α, 有 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\alpha)\varepsilon_i$,

而对 $L(V,P)$ 中任意向量 f, 有 $f=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)f_i$.

定理 2

$L(V,P)$ 的维数等于 V 的维数, 而且 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $L(V,P)$ 的一组基.

定义 2

$L(V,P)$ 称为 V 的 **对偶空间**. 由 $f_i(\varepsilon_j)$ 决定的 $L(V,P)$ 的基称为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的 **对偶基**. V 的对偶空间简记为 V^*.

定理 3

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是线性空间 V 的两组基, 它们的对偶基分别是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 及 $g_1,g_2,\cdots,g_n$. 如果由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 A, 那么由 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的过渡矩阵为 $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,\\
(g_1,g_2,\cdots,g_n)&=(f_1,f_2,\cdots,f_n)B,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_i&=a_{1i}\varepsilon 1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n,\\
g_j&=b_{ij}f_1+b_{2j}f_2+\cdots+b_{nj}f_n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_j(\eta_i)&=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}f_k(a_{1i}\varepsilon_1+a_{2i}\varepsilon_2+\cdots+a_{ni}\varepsilon_n)\\
&=b_{1j}a_{1i}+b_{2j}a_{2i}+\cdots+b_{nj}a_{ni}\\
&=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j;\end{cases}\quad ,i,j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{\mathrm{T}}A&=E, \qquad A^{\mathrm{T}}B=E,\\
B^{\mathrm{T}}&=A^{-1}, \qquad B^{-1}=A^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

定理 4

设 V 是一个线性空间, V^{**} 是 V 的对偶空间的对偶空间. V 到 V^{**} 的映射

$$x\to x^{**}$$

是一个同构映射, 其中 $x^{**}(f)=f(x), x\in V, f\in V^*$.

- 即证 $(x_1+x_2)^{**}=x_1^{**}+x_2^{**}$, $(kx_1)^{**}=kx_1^{**}$, 且若有零函数 $x^{**}(f)=f(x)=0$, 则 $x=0$, 又因 V 与 V^{**} 维数相同, 故为同构映射.
- V 与 V^{**} 互为线性函数空间.

10.3 双线性函数

定义 3

> V 是数域 P 上一个线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上一个二元函数, 即对 V 中任意两个向量 α,β, 根据 f 都唯一地对应与 P 中一个数 $f(\alpha,\beta)$. 如果 $f(\alpha,\beta)$ 有下列性质:
>
> 1. $f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$;
> 2. $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$,
>
> 则称 $f(\alpha,\beta)$ 为 V 上的一个 **双线性函数**.

- 协方差是线性函数, 但不是双线性函数.
- 方差是二次齐次函数, 但不是线性函数.

例子

- 欧氏空间中的内积.
- $f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)$.
- $f(X,Y)=X^{\mathrm{T}}AY=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$.
- 一般形式

$$
\begin{aligned}
\alpha&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X,\\
\beta&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y,\\
f(\alpha,\beta)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.
\end{aligned}
$$

定义 4

> 设 $f(\alpha,\beta)$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 则矩阵
>
> $$
> A=\begin{pmatrix}
> f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\
> f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\
> \vdots & \vdots & & \vdots\\
> f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n)
> \end{pmatrix}
> $$
>
> 称为 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的 **度量矩阵**.

不同基下度量矩阵的关系

$$
(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C.
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)X_1,\\
\beta&=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Y_1.
\end{aligned}
$$

$$
X=CX_1,\quad Y=CY_1.
$$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha,\beta) &= X^{\mathrm{T}}AY = (CX_1)^{\mathrm{T}}A(CY_1) \\
&= X_1^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y_1 = C^{\mathrm{T}}AC
\end{aligned}
$$

$$
B = C^{\mathrm{T}}AC
$$

即同一个线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

定义 5

> 设 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上一个双线性函数, 如果
>
> $$f(\alpha,\beta)=0,$$
>
> 对任一 $\beta\in V$, 可推出 $\alpha=0$, 则称 f 为非退化的.

- f 为非退化的充要条件是其度量矩阵 A 为非退化矩阵.

定义 6

> $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数, 如果对 V 中任意两个向量 α,β 都有
>
> $$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha),$$
>
> 则称 $f(\alpha,\beta)$ 为 **对称双线性函数**. 如果对 V 中任意两个向量 α,β 都有
>
> $$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha),$$
>
> 则称 $f(\alpha,\beta)$ 为 **反称双线性函数**.

- 双线性函数是对称 (反称) 的, 当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是对称 (反称) 矩阵.

定理 5

> 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上的对称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, 使得 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵.

- 另证:

只要证明能找到一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，使

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,\quad i\neq j.$$

如果对 V 中一切 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则结论成立.

如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 不全为 0，先证必有 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 使 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)\neq 0$. 否则，若对于所有 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，皆有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$，那么对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{2}\{f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\}=0,$$

矛盾，所以这样的 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 是存在的. 现在对空间维数 n 作归纳法. 设对于维数 $\leqslant n-1$ 的空间，上述结论成立. 将 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 扩充成 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i'=\boldsymbol{\eta}_i-\frac{f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_i)}{f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\qquad i=2,3,\cdots,n,$$

则

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_i')=0,\qquad i=2,3,\cdots,n.$$

易知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 仍是 V 的一组基，考察由 $\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$ 生成的线性子空间 $L(\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$，其中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都满足 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\alpha})=0$，而且 $V=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1)\oplus L(\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$. 把 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 看成 $L(\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$ 上的双线性函数，仍然是对称的. 但是 $L(\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$ 的维数小于 n，由归纳法假设，$L(\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$ 有一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，满足

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,\quad i,j=2,3,\cdots,n,\quad i\neq j.$$

由于 $V=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1)\oplus L(\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，且满足要求. ▌

- 如果 $f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为对角矩阵，那么对 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$

$$f(\alpha,\beta)=d_1x_1y_1+d_2x_2y_2+\cdots+d_nx_ny_n.$$

推论 1

> 设 V 是复数域上 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对 V 中任意向量 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$ 有
>
> $$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,\quad 0\leq r\leq n.$$

推论 2

> 设 V 是实数域上 n 维线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，对 V 中任意向量 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$ 有
>
> $$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r,\quad 0\leq p\leq r\leq n.$$

定义 7

> 设 V 是数域 P 上线性空间，$f(\alpha,\beta)$ 是 V 上双线性函数. 当 $\alpha=\beta$ 时，V 上函数 $f(\alpha,\alpha)$ 称为与 $f(\alpha,\beta)$ 对应的二次齐次函数.

- 两个双线性函数的度量矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$ 只要满足 $a_{ij}+a_{ji}=b_{ij}+b_{ji}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，那么它们对应的二次齐次函数就相同.

定理 6

设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上的反称双线性函数, 则存在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r},\eta_1,\cdots,\eta_s$, 使得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_{-i})=1, & i=1,2,\cdots,r; \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i+j\neq 0; \\ f(\alpha,\eta_k)=0, & \alpha\in V,k=1,2,\cdots,s. \end{cases}$$

证明　如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是零函数, 那么 V 的任一组基都可取作 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 而满足要求.

如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 不是零函数, 则必有 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\beta}$ 使 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\beta})\neq 0$. 因为 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\lambda\boldsymbol{\beta})=\lambda f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\beta})$, 故可取适当的 λ, 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_{-1}=\lambda\boldsymbol{\beta}$, 而使 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1})=1$.

将 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1}$ 扩充成 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\beta}'_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}'_n$. 令

$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}'_i-f(\boldsymbol{\beta}'_i,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1})\boldsymbol{\varepsilon}_1+f(\boldsymbol{\beta}'_i,\boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\quad i=3,4,\cdots,n,$$

则

$$f(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_1)=f(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1})=0,\quad i=3,4,\cdots,n.$$

显然 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 仍是 V 的基. 于是

$$V=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1})\oplus L(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),$$

并且 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 看作 $L(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 上的双线性函数仍是反称的. 因此应用归纳法, 有 $L(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_{-2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{-r},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 满足 (6). 由于 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\beta}_i)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\beta}_i)=0,i=3,4,\cdots,n$, 因此对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in L(\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, 都有 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\alpha})=0$, 故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{-r},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 也满足 (6). ▌

- 对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 如果是非退化的, 则有 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 满足

  $$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\neq 0, & i=1,2,\cdots,n; \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & j\neq i. \end{cases}$$

  这样的基称为 **正交基**.

- 反称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 如果是非退化的, 则有 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r}$ 使得

  $$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=1, & i=1,2,\cdots,r; \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i+j\neq 0. \end{cases}$$

  - 非退化反称双线性函数的线性空间一定是偶数维的.

定义 8

设 V 是数域 P 上的线性空间, 在 V 上定义了一个非退化双线性函数, 则 V 称为一个 **双线性度量空间**. 当 f 是非退化对称双线性函数时, V 称为 **正交空间**; 当 V 是 n 维实线性空间, f 是非退化对称双线性函数时, V 称为 **准欧氏空间**; 当 f 是非退化反称双线性函数时, V 称为 **辛空间**. 有着非退化双线性函数 f 的双线性度量空间常记为 (V,f).

10.4 辛空间

性质

1. 辛空间 (V,f) 中一定能找到一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{-r}$ 使得

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=1, & i=1,2,\cdots,r; \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & i+j\neq 0. \end{cases}$$

   这样的基称为 (V,f) 的 **辛正交基**. 辛空间一定是偶数维的.

2. 任一 $2n$ 阶非退化反称矩阵 K 可把一个数域 P 上 $2n$ 维空间 V 化成一个辛空间, 且使 K 为 V 的一组基 $e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{-1},e_{-2},\cdots,e_{-n}$ 下的度量矩阵. 又此辛空间在一组辛正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\varepsilon_{-1},\varepsilon_{-2},\cdots,\varepsilon_{-n}$ 下的度量矩阵为

$$J=\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}_{2n\times 2n},$$

   故 K 合同于 J. 即任一 $2n$ 阶非退化反称矩阵皆合同于 J.